KHÔNG GIAN VECTOR TOPO

Đại cương

SV:NGUYỄN CÔNG MINH
Người hướng dẫn: Ts. LÊ MINH TUẤN

14/6/2017

Đại học Sài Gòn

NỘI DUNG CHÍNH

Chương 1: Không gian vector topo.

1. Tổng quan.
2. Các tính chất rời rạc
3. Ánh xạ tuyến tính.
4. Không gian hữu hạn chiều.
5. Phép metric hóa.
6. Tính bị chặn và tính liên tục.
7. Nửa chuẩn và tính lồi địa phương.
8. Không gian thương.
9. Các ví dụ.

Chương 2: Phụ lục.

Chương 3: Bài tập minh họa.

KHÔNG GIAN VECTOR

Định nghĩa

Một *không gian vector trên* trường vô hướng Φ là một tập hợp X mà các phần tử của nó được gọi là các vector với hai phép toán, *phép cộng* và *phép nhân vô hướng* được định nghĩa với 8 tiên đề đại số quen.

KHÔNG GIAN VECTOR

Định nghĩa

Nếu X là một không gian vector với $A \subset X$, $B \subset X$, x $\in$ X và $\lambda \in \Phi$, các kí hiệu sau đây sẽ được sử dụng:

$$x + A = \{x + a : a \in A\},$$

$$x - A = \{x - a : a \in A\},$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

KHÔNG GIAN VECTOR

Định nghĩa

Một tập $Y \subset X$ được gọi là một *không gian con* của X nếu chính Y cũng là một không gian vector (tất nhiên đối với cùng các phép toán trên X). Dễ dàng kiểm tra điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $0 \in Y$ và

$$\alpha Y + \beta Y \subset Y$$

với mọi vô hướng α và β.

Một tập $C \subset X$ được gọi là *lồi* nếu với $0 \leq t \leq 1$ thì

$$tC + (1-t)C \subset C.$$

KHÔNG GIAN VECTOR

Định nghĩa

Một tập $B \subset X$ được gọi là *cân bằng* nếu với $\alpha \in \Phi$ và $|\alpha| \leq 1$ thì

$$\alpha B \subset B.$$

Một không gian X có *n chiều* (hoặc Không gian vector n chiều) (dimX = n) nếu X có một cơ sở gồm n phần tử $u_1, ..., u_n$. Điều này nghĩa là với mọi $x \subset X$ có một biểu thị tuyến tính duy nhất có dạng:

$$x = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_n u_n$$

với $\alpha_i \in \Phi$.

KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN - KHÔNG GIAN METRIC

Định nghĩa Cho một không gian vector X trên Φ. Một ánh xạ

$$\| \cdot \| : X \longrightarrow \Phi \qquad x \longmapsto \|x\|$$

được gọi là một *chuẩn* trên X nếu các tính chất sau đây thỏa với mọi $x, y \in X$, $\alpha \in \Phi$

(a) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$,

(b) $\| \alpha x \| = | \alpha | \| x \|$,

(c) $\| x \| > 0$ nếu $x \neq 0$.

Không gian vector X với một chuẩn được gọi *không gian định chuẩn*.

KHÔNG GIAN ĐỊNH CHUẨN - KHÔNG GIAN METRIC

Định nghĩa Cho X là một tập không rỗng. Một ánh xạ

$$d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (x, y) \longmapsto d(x, y)$$

được gọi là một *metric* trên X nếu các tính chất sau thỏa với mọi $x, y, z \in X$,

(a) $0 \le d(x, y) < \infty$,

(b) $d(x, y) = 0$ nếu và chỉ nếu $x = y$,

(c) $d(x, y) = d(y, x)$,

(d) $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$.

Tập X với một metric d được gọi là một *không gian metric*.

KHÔNG GIAN TOPO

Định nghĩa Một *không gian topo* là một tập S với một họ τ các tập con (gọi là các *tập mở*) đã được chỉ rõ, với các tính chất sau:

(a) S và $\varnothing$ là mở,

(b) Giao của hai tập mở bất kì là mở,

(c) Hợp của một họ các tập mở bất kì là mở.

Một họ τ như vậy được gọi là một *topo* trên S.

KHÔNG GIAN VECTOR TOPO

Định nghĩa

Giả sử τ là một topo trên một không gian vector X sao cho

1. *Mọi điểm của X đều là một tập đóng, và*
2. *Các phép toán trong không gian vector là liên tục đối với τ.*

KHÔNG GIAN VECTOR TOPO

Mệnh đề 1.6.1

Phép cộng *liên tục*: Xét $x_i \in X$ với i = 1, 2 và V là một lân cận của $x_1 + x_2$, khi đó tồn tại các lân cận V_i của x_i sao cho

$$V_1 + V_2 \subset V.$$

Tương tự, phép nhân vô hướng là liên tục: Nếu $x \in X$, α là một vô hướng, và V là một lân cận của αx, khi đó tồn tại r > 0 và lân cận W nào đó của x sao cho

$$\beta W \subset V, \qquad |\beta - \alpha| < r.$$

KHÔNG GIAN VECTOR TOPO

Tính bất biến

Cho X là một không gian vector topo. Kết hợp với mỗi $a \in X$ và mỗi vô hướng $\lambda \neq 0$, *phép tịnh tiến* T_a và *phép vị tự* M_λ có công thức sau:

$$T_a(x) = a + x, \qquad\qquad M_\lambda(x) = \lambda x$$

với $x \in X$.

KHÔNG GIAN VECTOR TOPO

Mệnh đề 1.7.1

T_a và M_λ là các *đồng phôi* từ X vào X (X là không gian vector topo).

Hệ quả 1.7.2

Một tập $E \subset X$ là mở trong không gian vector topo nếu và chỉ nếu mỗi phép tịnh tiến của $a + E$ là mở. Do đó τ hoàn toàn được xác định bởi một cơ sở địa phương bất kì.

CÁC KHÔNG GIAN HÀM

1. C(Ω), không gian tất cả các hàm phức liên tục trên một tập mở Ω nào đó trong không gian Euclidean $\mathbb{R}^n$.
2. H(Ω), không gian tất cả các hàm giải tích trên một tập mở Ω nào đó trong mặt phẳng phức.
3. C_K^∞, không gian của vô hạn tất cả các hàm vi phân phức trên $\mathbb{R}^n$, mà triệt tiêu bên ngoài tập compact K được cố định nào đó với phần trong không rỗng.

CÁC KIỂU KHÔNG GIAN VECTOR TOPO

(X luôn được kí hiệu cho không gian vector topo với topo τ)

1. X là *lồi địa phương* nếu có một cơ sở địa phương $\mathscr{B}$ mà các phần tử của nó là lồi.
2. X là *bị chặn địa phương* nếu 0 có một lân cận bị chặn.
3. X là *compact địa phương* nếu 0 có một lân cận mà bao đóng của nó là compact.
4. X là *metric hóa được* nếu τ tương thích với một metric nào đó.
5. X là một *không gian - F* nếu topo τ của nó được cảm sinh bởi một metric *d* đầy đủ bất biến.

CÁC KIỂU KHÔNG GIAN VECTOR TOPO

1. X là một *không gian Fréchet* nếu X là một không gian - F lồi địa phương.
2. X là *chuẩn hóa được* nếu có một chuẩn tồn tại trên X sao cho metric sinh bởi chuẩn là tương thích với τ.
3. *Các không gian định chuẩn* và *không gian Banach* đã được định nghĩa.
4. X có *tính Heine - Borel* nếu mọi tập con đóng và bị chặn của X là compact.

MỘT SỐ MỐI QUAN HỆ TRONG KGVTTP

1. Nếu X bị chặn địa phương, khi đó X có một cơ sở địa phương đếm được. (Phần (c) định lí 1.15)
2. X có chiều hữu hạn nếu và chỉ nếu X compact địa phương. (Định lí 1.21, 1.22)
3. Nếu một không gian bị chặn địa phương X có tính chất Heine - Borel, khi đó X có chiều hữu hạn. (Định lí 1.23)
4. X là metric hóa nếu và chỉ nếu X có một cơ sở địa phương đếm được. (Định lí 1.24)
5. X là chuẩn hóa nếu và chỉ nếu X lồi địa phương và bị chặn địa phương. (Định lí 1.39)

Định lí 1.10

Giả sử K và C là các tập con của một không gian vector topo X, K là compact, C đóng, và $K \cap C = \varnothing$. Khi đó 0 có một lân cận V sao cho

$$(K + V) \cap (C + V) = \varnothing$$

Hệ quả 1.10.2

$$\overline{K + V} \cap (C + V) = \varnothing.$$

$$\overline{K + V} \cap C = \varnothing.$$

Định lí 1.11

Nếu $\mathscr{B}$ *là một cơ sở địa phương của một không gian vector topo* X*, khi đó mọi phần tử của* $\mathscr{B}$ *đều chứa bao đóng của phần tử nào đó trong* $\mathscr{B}$*.*

Định lí 1.12

Mọi không gian vector topo đều là một không gian Hausdorff.

Định lí 1.13

1. *Nếu* $A \subset X$, *khi đó* $\overline{A} = \bigcap (A + V)$, *với* V *chạy khắp tất cả các lân cận của 0.*
2. *Nếu* $A \subset X$ *và* $B \subset X$, *khi đó* $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.
3. *Nếu* Y *là không gian con của* X *thì* $\overline{Y}$ *cũng vậy.*
4. *Nếu* C *là một tập con lồi của* X *thì* $\overline{C}$ *và* C^o *cũng vậy.*
5. *Nếu* B *là một tập con cân bằng của* X *thì* $\overline{B}$ *cũng vậy; nếu 0 cũng thuộc* B^o *thì* B^o *cân bằng.*
6. *Nếu* E *là một tập con bị chặn của* X *thì* $\overline{E}$ *cũng vậy.*

Định lí 1.14

Trong một không gian vector topo X,

1. *Mọi lân cận của 0 đều chứa một lân cận cân bằng của 0.*
2. *Mọi lân cận lồi của 0 đều chứa một lân cận cân bằng lồi của 0.*

Hệ quả 1.14.1

1. *Mọi không gian vector topo đều có một cơ sở địa phương cân bằng.*
2. *Mọi không gian lồi địa phương đều có một cơ sở địa phương cân bằng lồi.*

Định lí 1.15

Giả sử V là một lân cận của 0 trong một KGVTTP X.

1. Nếu $0 < r_1 < r_2 < \ldots$ và $r_n \longrightarrow \infty$ khi $n \longrightarrow \infty$, khi đó
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V.$$
2. Mọi tập con compact K của X đều bị chặn.
3. Nếu $\delta_1 > \delta_2 > \ldots$ và $\delta_n \longrightarrow 0$ khi $n \longrightarrow \infty$, và nếu V là bị chặn, khi đó họ
$$\{\delta_n V : n = 1, 2, 3, \ldots\}$$
là một cơ sở địa phương của X.

Các định nghĩa

Giả sử rằng X và Y là các không gian vector trên *cùng trường vô hướng*. Một ánh xạ $\Lambda : X \longrightarrow Y$ được gọi là *tuyến tính* nếu

$$\Lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha \Lambda x + \beta \Lambda y$$

với mọi $x, y \in X$ và mọi vô hướng α, β và Λx, Λy lần lượt là ảnh của x,y qua Λ .

Tính chất 1.16.1

Giả sử $\Lambda : X \longrightarrow Y$ và $A \subset X$ và $B \subset Y$, khi đó

1. $\Lambda \mathbb{O} = 0$.
2. Nếu A là một không gian con (hoặc một tập lồi, hoặc một tập cân bằng) thì $\Lambda(A)$ cũng vậy.
3. Nếu B là một không gian con (hoặc một tập lồi, hoặc một tập cân bằng) thì $\Lambda^{-1}(B)$ cũng vậy.
4. Đặc biệt, tập hợp

$$\Lambda^{-1}(\{0\}) = \{x \in X : \Lambda x = 0\} = \mathscr{N}(\Lambda)$$

là một không gian con của X, được gọi là *không gian triệt* (hoặc *không gian nghiệm*) của Λ.

Định lí 1.17

Cho X và Y là các không gian vector topo. Nếu $\Lambda : X \longrightarrow Y$ là tuyến tính và liên tục tại 0, khi đó Λ là liên tục (trên X). Thực vậy, Λ là liên tục đều nghĩa là: với mỗi lân cận W của 0 trong Y tương ứng một lân cận V của 0 trong X sao cho

$$y - x \in V \Rightarrow \Lambda y - \Lambda x \in W$$

với mọi $x, y \in X$.

Định lí 1.18

Cho Λ là một phiếm hàm tuyến tính trên không gian vector topo X. Giả sử $\Lambda x \neq 0$ với một vài phần tử $x \in X$. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương nhau:

1. *Λ là liên tục.*
2. *Không gian triệt $\mathscr{N}(\Lambda)$ là đóng.*
3. *$\mathscr{N}(\Lambda)$ là không dày đặc trong X.*
4. *Λ bị chặn trong một lân cận V nào đó của 0.*

Bổ đề

Nếu X là không gian vector topo phức và nếu $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow X$ là tuyến tính, khi đó f là liên tục.

Định lí 1.21

Nếu n là một số nguyên dương và Y là một không gian con n chiều của một không gian vector topo phức X, khi đó

1. *Mọi đẳng cấu từ $\mathbb{C}^n$ vào Y luôn là một đồng phôi.*
2. *Y là đóng.*

Định lí 1.22

Mọi không gian vector topo compact địa phương X đều hữu hạn chiều.

Định lí 1.23

Nếu X là một không gian vector topo bị chặn địa phương với tính chất Heine - Borel, khi đó X hữu hạn chiều.

Định lí 1.24

Nếu X là một không gian vector topo với một cơ sở địa phương đếm được, khi đó có một metric d trên X sao cho

1. *d tương thích với topo của X,*
2. *các quả cầu mở tâm tại 0 là cân bằng,*
3. *d là bất biến $d(x+z, y+z) = d(x, y)$ với $x, y, z \in X$.*
   Hơn nữa, nếu X là lồi địa phương, khi đó d có thể được chọn sao cho thỏa (1), (2), (3) và
4. *tất cả các quả cầu mở là lồi.*

Dãy Cauchy

(a) Giả sử d là một metric trên một tập X. Một dãy $\{x_n\}$ trong X là một *dãy Cauchy* nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số dương N sao cho $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ với m > N và n > N. Nếu mọi dãy Cauchy trong X hội tụ về một điểm thuộc X khi đó d được gọi là một *metric đầy đủ* trên X.

(b) Cho τ là một topo trên một không gian vector topo X. Khái niệm dãy Cauchy có thể được định nghĩa trong cấu trúc này mà không có bất cứ liên quan gì đến metric: Chọn một cơ sở địa phương B cho τ. Một dãy $\{x_n\}$ trong X được gọi là một *dãy Cauchy* nếu với mọi lân cận $V \in B$ tồn tại một số nguyên dương N sao cho $x_n - x_m \in V$ nếu m > N và n > N.

Mệnh đề 1.25.1 *Một dãy* $\{x_n\}$ *trong* X *là một dãy* d *- Cauchy khi và chỉ khi nó là một dãy* τ *- Cauchy.*

Mệnh đề 1.25.2 *Nếu* d_1 *và* d_2 *là các metric bất biến trong một không gian vector* X *cảm sinh cùng một topo trên* X*, khi đó*

(a) d_1 *và* d_2 *có cùng các dãy Cauchy.*

(b) d_1 *đầy đủ nếu và chỉ nếu* d_2 *đầy đủ.*

Định lí 1.26

Giả sử (X, d_1) *và* (Y, d_2) *là các không gian metric, và* (X, d_1) *là đầy đủ. Nếu* E *là một tập đóng trong* X, $f : E \longrightarrow Y$ *là liên tục và*

$$d_2(f(x'), f(x'')) \geq d_1(x', x'')$$

với mọi $x', x'' \in E$, *khi đó* $f(E)$ *đóng.*

Định lí 1.27

Giả sử Y là một không gian con của một không gian vector topo X, và Y là một không gian - F (trong topo kế thừa từ X). Khi đó Y là một không gian con đóng của X.

Định lí 1.28

1. Nếu d là một metric biến hình bất biến trên một không gian vector X khi đó
$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$$
với mọi $x \in X$ và với n = 1, 2, ...
2. Nếu $\{x_n\}$ trong một không gian vector topo metric hóa (được) X và nếu $x_n \longrightarrow 0$ khi $n \longrightarrow \infty$, khi đó tồn tại một dãy số thực dương $\{\gamma_n\}$ sao cho $\gamma_n \longrightarrow \infty$ và $\gamma_n x_n \longrightarrow 0$.

6. TÍNH BỊ CHẶN VÀ TÍNH LIÊN TỤC

Định nghĩa Nếu d là một metric trên một tập X, một tập $E \subset X$ được gọi là bị chặn - d nếu tồn tại một số M $< \infty$ sao cho $d(x, y) < M$ với mọi x và y thuộc E.

Mệnh đề 1.29.1 *Mọi dãy Cauchy đều bị chặn* (dẫn tới *mọi dãy hội tụ đều bị chặn*).

Định lí 1.30

Hai tính chất sau đây của một tập E trong một không gian vector topo là tương đương nhau:

(a) *E bị chặn.*

(b) *Nếu $\{x_n\}$ là một dãy trong E và $\{\alpha_n\}$ là một dãy vô hướng sao cho $\alpha_n \longrightarrow 0$ khi $n \longrightarrow \infty$, khi đó $\alpha_n x_n \longrightarrow 0$ khi $n \longrightarrow \infty$.*

PHÉP BIẾN ĐỔI TUYẾN TÍNH BỊ CHẶN

Giả sử X và Y là các không gian vector topo và $\Lambda : X \longrightarrow Y$ là tuyến tính. Λ được gọi là *bị chặn* nếu Λ biến một tập bị chặn thành một tập bị chặn; nghĩa là $\Lambda(E)$ là một tập bị chặn trong Y nếu E là một tập bị chặn trong X.

Định lí 1.32

Giả sử X và Y là các không gian vector topo và $\Lambda : X \longrightarrow Y$ là tuyến tính. Bốn tính chất của Λ sẽ lần lượt suy ra như sau:

$$(a) \longrightarrow (b) \longrightarrow (c).$$

Nếu X là metric hóa, khi đó $(c) \longrightarrow (d) \longrightarrow (a)$.

(a) Λ là liên tục.

(b) Λ là bị chặn.

(c) Nếu $x_n \longrightarrow 0$ thì $\{\Lambda x_n : n = 1, 2, ...\}$ bị chặn.

(d) Nếu $x_n \longrightarrow 0$ thì $\Lambda x_n \longrightarrow 0$.

Các định nghĩa

Một *nửa chuẩn* trên một không gian vector X là một hàm số thực p trên X sao cho

(a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$,

(b) $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ với mọi x và y thuộc X và mọi vô hướng α.

Tính chất (a) được gọi là *bán cộng tính*. Định Lí 1.34 sẽ chứng minh rằng một nữa chuẩn p là một chuẩn nếu nó thỏa

(c) $p(x) \neq 0$ nếu $x \neq 0$.

Các định nghĩa

Một họ $\mathscr{P}$ các nửa chuẩn trên X được gọi là *rời rạc* nếu với mỗi $x \neq 0$ tương ứng với ít nhất một $p \in \mathscr{P}$ sao cho $p(x) \neq 0$.

Tiếp theo, xét một tập lồi $A \subset X$ là *hấp thụ*, nghĩa là với mọi $x \in X$ đều nằm trong tA với t hữu hạn nào đó sao cho $t = t(x) > 0$.

Phiếm hàm Minkowski μ_A của A được định nghĩa như sau:

$$\mu_A(x) = inf\{t > 0 : t^{-1}x \in A\} \qquad (x \in X).$$

Định lí 1.34

Giả sử p là một nửa chuẩn trên một không gian vector X. Khi đó

(a) $p(0) = 0$.

(b) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.

(c) $p(x) \geq 0$.

(d) $\{x : p(x) = 0\}$ *là một không gian con của X.*

(e) *Tập* $B = \{x : p(x) < 1\}$ *là lồi, cân bằng, hấp thụ, và* $p = \mu_B$.

Định lí 1.35

Giả sử A là một tập lồi hấp thụ trong một không gian vetor X. Khi đó

(a) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$.

(b) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ *nếu* $t \geq 0$.

(c) μ_A *là một nửa chuẩn nếu* A *cân bằng.*

(d) *Nếu* $B = \{x : \mu_A(x) < 1\}$ *và* $C = \{x : \mu_A(x) \leq 1\}$*, khi đó* $B \subset A \subset C$ *và* $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

Định lí 1.36

Giả sử $\mathscr{B}$ là một cơ sở địa phương cân bằng lồi trong một không gian vector topo X. Với mọi $V \in \mathscr{B}$ ứng với phiếm hàm Minkowski μ_V của nó. Khi đó

(a) $V = \{x \in X : \mu_V(x) < 1\}$, *với mọi* $V \in \mathscr{B}$,

(b) $\{\mu_V : V \in \mathscr{B}\}$ *là một họ rời rạc của các nửa chuẩn liên tục trên* X.

Định lí 1.37

Giả sử $\mathscr{P}$ là một họ rời rạc của các nửa chuẩn trên một không gian vector X. Ứng với mỗi $p \in \mathscr{P}$ và ứng với mỗi số nguyên dương n, tập hợp

$$V(p, n) = \left\{x : p(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Cho $\mathscr{B}$ là họ tất cả các giao hữu hạn của các tập $V(p, n)$. Khi đó $\mathscr{B}$ là một cơ sở địa phương cân bằng lồi với một topo τ trên X, X trở thành một không gian lồi địa phương sao cho

(a) Mọi $p \in \mathscr{P}$ là liên tục,

(b) Một tập $E \subset X$ là bị chặn nếu và chỉ nếu mọi $p \in \mathscr{P}$ là bị chặn trên E.

Các chú ý

Định lí 1.36 và 1.37 phát sinh một vấn đề tự nhiên: Nếu $\mathscr{B}$ là một cơ sở địa phương cân bằng lồi đối với topo τ của một không gian lồi địa phương X, khi đó $\mathscr{B}$ sinh ra một họ rời rạc $\mathscr{P}$ của các nửa chuẩn liên tục trên X, như trong định lí 1.36. Họ $\mathscr{P}$ này cảm sinh một topo τ_1 trên X được mô tả trong định lí 1.37. Vậy $\tau = \tau_1$ hay không?

Nếu $\mathscr{P} = \{p_i : 1, 2, 3, ...\}$ là một họ rời rạc đếm được của các nửa chuẩn trên X, định lí 1.37 chứng minh rằng $\mathscr{P}$ cảm sinh một topo τ với một cơ sở địa phương đếm được. Bởi định lí 1.24, τ là metric hóa. Trong tình huống hiện tại, một metric bất biến tương ứng có thể được định nghĩa một cách trực tiếp như sau

$$d(x, y) = \max_i \frac{c_i p_i(x - y)}{1 + p_i(x - y)}$$

với $\{c_i\}$ là một dãy các số nguyên dương cố định hội tụ về 0 khi n tiến ∞.Dễ dàng kiểm tra d là một metric trên X

Định lí 1.39

Một không gian vector topo X là chuẩn hóa (được) nếu và chỉ nếu gốc tọa độ của nó có một lân cận lồi bị chặn.

Các định nghĩa Cho N là một không gian con của một không gian vector X. Với mọi $x \in X$, cho $\pi(x)$ là *lớp kề* của N mà chứa x; với

$$\pi(x) = x + N.$$

Các lớp kề này là các phần tử của một không gian vector X/N, được gọi là *không gian thương* của X *modulo* N, phép cộng và phép nhân vô hướng trong không gian này được định nghĩa như sau:

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x + y), \qquad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x).$$

Định lí 1.41

Cho N là một *không gian con đóng* của một không gian vector topo X. Cho τ là một topo của X và định nghĩa τ_N như trên.

(a) τ_N là một vector topo trên X/N; ánh xạ thương $\pi : X \longrightarrow X/N$ là tuyến tính, liên tục và mở.

(b) Nếu $\mathscr{B}$ là một cơ sở địa phương của τ, khi đó họ tất cả các tập $\pi(V)$ với $V \subset \mathscr{B}$ là một cở sở địa phương của τ_N.

(c) Mỗi tính chất sau của X/N được kế thừa từ X: tính lồi địa phương, tính bị chặn địa phương,tính metric hóa, tính chuẩn hóa.

(d) Nếu X là một không gian - F, hoặc là một không gian Fréchet, hoặc là một không gian Banach, thì X/N cũng vậy.

Định lí 1.42

Giả sử N và F là các không gian con của một không gian vector topo X, N là đóng và F là hữu hạn chiều. Khi đó $N + F$ là đóng.

Không gian $C(\Omega)$

là không gian vector của tất cả các hàm số phức liên tục trên Ω

topo hoá bởi họ rời rạc các nửa chuẩn

$$p_n(f) = sup\{|f(x)| : x \in K_n\}$$

phù hợp với định lí 1.37. Vì $p_1 \leq p_2 \leq ...$, các tập

$$V_n = \left\{ f \in C(\Omega) : p_n(f) < \frac{1}{n} \right\} \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

xác định một cơ sở lồi địa phương cho $C(\Omega)$. Theo chú ý (c) phần 1.38, topo của $C(\Omega)$ tương ứng với metric

$$d(f, g) = \max_n \frac{2^{-n} p_n(f - g)}{1 + p_n(f - g)}.$$

Không gian $H(\Omega)$

Cho Ω là một tập con mở không rỗng của mặt phẳng phức, định nghĩa $C(\Omega)$ như phần trên, và cho $H(\Omega)$ là không gian con của $C(\Omega)$ bao gồm các hàm giải tích trong Ω.

Không gian $C^\infty(\Omega)$ và $\mathscr{D}_K$

Thuật ngữ *bộ đa chỉ số* là một bộ - n được sắp thứ tự

$$\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$$

của các số nguyên không âm α_i. Với mỗi bộ α được liên kết với các phép toán vi phân

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

với

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n.$$

Không gian $C^\infty(\Omega)$ và $\mathscr{D}_K$

Nếu $|\alpha| = 0$ thì $D^\alpha f = f$.
Một hàm phức f định nghĩa trong trong các tập mở không rỗng $\Omega \subset R^n$ được gọi là thuộc $C^\infty(\Omega)$ nếu $D^\alpha f \in C(\Omega)$ với mọi bộ đa chỉ số α.
Sự hỗ trợ của một hàm phức f (trên không gian topo bất kì) là bao đóng của $\{x : f(x) \neq 0\}$.
Nếu K là một tập compact trên $\mathbb{R}^n$, khi đó $\mathscr{D}_K$ là kí hiệu cho không gian của tất cả $f \in C^\infty(\Omega)$ mà hỗ trợ của nó nằm trong K

Không gian $C^\infty(\Omega)$ và $\mathscr{D}_K$

Chọn các tập compact K_i với $i = 1, 2, ...$ sao cho $K_i \subset (K_{i+1})^0$ và $\Omega = \bigcup K_i$. Định nghĩa các nửa chuẩn p_N trên $C^\infty(\Omega)$ với $N = 1, 2, ...$ như sau

$$p_N(f) = max\{|D^\alpha f(x)| : x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$$

Chúng định nghĩa một topo lồi địa phương metric hoá trên $C^\infty(\Omega)$; xem định lí 1.37 và chú ý (c) phần 1.38.
Một cơ sở địa phương được cho trước bởi các tập

$$V_N = \left\{f \in C^\infty(\Omega) : p_N(f) < \frac{1}{N}\right\} \quad (N = 1, 2, ...).$$

Không gian L^p với $0 < p < 1$

Xét một p cố định chạy khắp $(0, 1)$. Các phần tử của L^p là các hàm Lebesgue đo được f trên $[0, 1]$ với

$$\Delta(f) = \int_0^1 |f(t)|^p \, dt < \infty$$

với sự xác định thông thường của các hàm trùng khớp hầu như khắp nơi.

$$d(f, g) = \Delta(f - g)$$

định nghĩa một metric bất biến trên L^p. Các quả cầu

$$B_r = \{f \in L^p : \Delta(f) < r\}$$

định dạng một cơ sở địa phương cho topo của L^p.